

Caracterización y control de un sistema mecánico para estudiar la fricción llanta-pavimento

Jeannete Aguilar-Martínez[†] y Luis Alvarez-Icaza[‡]

[†] Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California, 12345 Tecate, BC, México

[‡] Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Coyoacán DF, México

Resumen—Se describe un banco de pruebas para estudiar el fenómeno de fricción entre llanta y pavimento que consiste en una llanta de *go-kart* acoplada directamente a un motor de inducción y de un rodillo que rueda libremente sobre la llanta y que representa el pavimento y la inercia vehicular. Se describe el modelo matemático del banco de prueba y el proceso de caracterización de sus parámetros mecánicos. Finalmente, se muestran los resultados preliminares de un algoritmo para control de tracción diseñado con base en la teoría de Lyapunov y el modelo dinámico de fricción de LuGre.

Palabras clave—fricción llanta-pavimento; modelos dinámicos de fricción; modelo de LuGre; identificación de parámetros.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de la fricción llanta-pavimento empezó a cobrar importancia en los años 30's con investigaciones como las de Bradley y Allen que estudiaron las propiedades dinámicas de los neumáticos (Bradley, J. y Allen, R. F. 1931) e identificaron la dependencia entre la fuerza de frenado y el índice de deslizamiento. A partir de aquellos estudios surgieron los primeros modelos sobre neumáticos, que permiten representar matemáticamente su comportamiento o sus principales características dinámicas.

La mayoría de los modelos planteados hasta este momento comparten una importante base experimental, en particular los modelos pseudo-estáticos. Las investigaciones más sobresalientes que hacen referencia a los modelos pseudo-estáticos son las de Bakker, Nyborg y Pacejka (1987) y Burckhardt (1993), que describen modelos analíticos para el comportamiento de la interfaz llanta-pavimento que son usados intensivamente para la investigación en este ámbito. En estos modelos, el coeficiente de fricción μ es principalmente función del deslizamiento de la llanta λ (Harned, J. *et al.* 1969).

Uno de los problemas centrales para los sistemas de control de vehículos es el de la estabilidad vehicular, que está fuertemente relacionado con las fuerzas en la interfaz llanta-pavimento y que de no atenderse adecuadamente puede producir situaciones indeseables de alto riesgo. Un modelo adecuado de fricción, junto con estrategias de control y compensación son necesarios para lograr comportamientos deseables en el vehículo. Los modelos analíticos de fricción

llanta-pavimento ayudan en esta dirección, sin embargo, obtenerlos no es una tarea fácil. Este artículo describe un banco de pruebas para investigar la fricción llanta-pavimento que consiste en una llanta de *go-kart* directamente acoplada a un motor de inducción. La llanta impulsa por fricción un rodillo que gira libremente sobre ella alrededor de un eje de giro. El rodillo representa tanto la inercia del vehículo como el pavimento. La intención inicial es validar el uso del modelo dinámico de LuGre propuesto por (Canudas de Wit, C. *et al.* 1995) en el diseño de estrategias avanzadas para el control de tracción y frenado vehicular. Para ello, la primera parte del trabajo describe tanto el diseño del banco de pruebas, como el de su modelo matemático, que incorpora el uso del modelo de LuGre para describir la fricción en la interfase llanta-pavimento. La segunda parte describe una serie de experimentos realizados para caracterizar los parámetros del modelo matemático. Finalmente, se incluyen resultados preliminares de una ley de control de tracción/frenado diseñada con base en modelos dinámicos de fricción y teoría de Lyapunov.

II. MODELO MATEMÁTICO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO

Para describir el movimiento longitudinal del vehículo, se utiliza el modelo de un cuarto de vehículo que es apropiado cuando el interés está en la fricción llanta-pavimento (Kiencke, U. 1993), (Kiencke, U. y Daiss, A. 1994) y (Liu, Y. y Sun, J. 1995) y que está dado por

$$m\dot{v} = 4F - F_a \quad (1)$$

donde m es la masa del vehículo, v su velocidad longitudinal, F la fuerza entre la llanta y el pavimento y F_a la fuerza aerodinámica de arrastre. La fuerza aerodinámica F_a puede expresarse de la siguiente manera

$$F_a = C_a v^2 \quad (2)$$

donde C_a es el coeficiente aerodinámico que depende del área longitudinal efectiva, la densidad del aire y la forma del vehículo. La fuerza de fricción llanta-pavimento puede expresarse de la siguiente manera

$$F = -\mu F_n \quad (3)$$

donde μ es el coeficiente de fricción llanta-pavimento y $F_n = \frac{mg}{4}$ es la fuerza normal en cada llanta.

[†] Profesor, jeannete.aguilar@uabc.edu.mx

[‡] Investigador, alvar@pumas.iingen.unam.mx, Corresponsal.

La dinámica rotacional de la llanta está descrita por

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_b - F R_1 \quad (4)$$

donde $\dot{\omega}_1$ es la aceleración angular, I_1 es la inercia de la llanta, τ_m es el par de impulso, τ_b es el par de frenado y R_1 es el radio efectivo de la llanta.

De las Ecs. (1) y (4) se puede establecer que la velocidad longitudinal v y la velocidad angular ω_1 estén relacionadas a través de la velocidad relativa definida como

$$s = v - R_1 \omega_1. \quad (5)$$

Tomando la derivada de la Ec. (5), sustituyendo \dot{v} y $\dot{\omega}_1$, y al hacer $\tau = \tau_m - \tau_b$, se tiene la siguiente expresión

$$\dot{s} = [-\mu g - C_a v^2] - R_1 \left[\frac{\tau}{I_1} + \mu \frac{m g R_1}{4 I_1} \right]. \quad (6)$$

Al tomar las Ecs. (2) y (3) y sustituir en la Ec. (1) la dinámica del vehículo se puede expresar como

$$\dot{v} = -a\mu - bv^2 \quad (7)$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - bv^2 - d\tau \quad (8)$$

donde $a = mg$, $b = C_a$, $c = \frac{mg R_1}{4 I_1}$ y $d = \frac{R_1}{I_1}$.

III. MODELO DINÁMICO DE FRICCIÓN

Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999) proponen el uso del modelo dinámico de fricción de LuGre para describir la fricción llanta-pavimento. Este modelo asume que las superficies de contacto son irregulares y que a nivel microscópico existen cerdas elásticas. Por ello, el contacto se puede visualizar como el que sucede entre estas cerdas y al aplicar una fuerza tangencial, las cerdas se deforman como resortes hasta llegar a un punto donde ocurre deslizamiento y con él la presencia de la fuerza de fricción.

El modelo de LuGre de parámetros concentrados está dado por

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (9)$$

$$\mu = \frac{F}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (10)$$

donde s es la velocidad relativa entre las superficies (llanta-pavimento) y z es un estado interno que representa la deformación promedio de las cerdas. Los parámetros σ_0 , σ_1 y σ_2 representan respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la fricción viscosa entre las superficies y F_n es la fuerza normal. Para modelar y describir el fenómeno "Stribeck" (Armstrong-Hélouvy, B. 1991) y (Canudas de Wit, C. *et al.* 1995) se utiliza la siguiente fórmula

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-\left(\frac{s}{v_s}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

donde μ_c es el coeficiente de Fricción de Coulomb, μ_s es el coeficiente de fricción estática y v_s es la velocidad de "Stribeck".

IV. DISEÑO MECÁNICO DEL SISTEMA EXPERIMENTAL

El sistema experimental se diseñó para reproducir el comportamiento dinámico de un vehículo. La Fig. 1 muestra la equivalencia entre el movimiento vehicular y el del banco de pruebas. El principal motivo por el cual se utiliza este diseño es su simplicidad, pues considera una sola llanta acoplada al eje de un servomotor sin transmisión y un rodillo de radio R_2 , impulsado por la fuerza de tracción de la llanta, que representa tanto a inercia del vehículo como el pavimento.

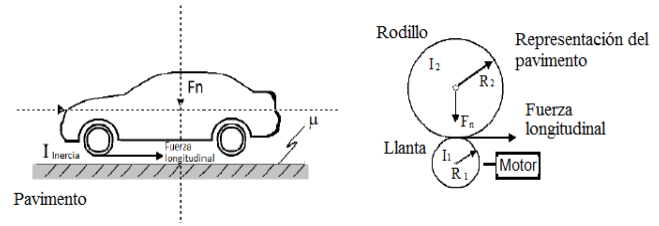


Figura 1. Representación de sólo la cuarta parte del vehículo, F_n representa la fuerza normal.

El material del rodillo es polietileno de alta densidad y el neumático es de go-kart con un perfil 4.5/10.0 – 5 DR10. La elección del servomotor se hizo a través de una relación de radios R_1 y R_2 , de velocidades angulares ω_1 y ω_2 , así como de los torques τ_1 y τ_2 (Aguilar, J. 2008). Se sabe que

$$r = \frac{R_2}{R_1} > 1 \quad (12)$$

y tomando en cuenta que

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (13)$$

donde $v = \omega_1 R_1$, por lo que se genera

$$\omega_1 = r \omega_2. \quad (14)$$

Con la derivada de la ecuación (15), se tiene

$$\alpha_1 = r \alpha_2 \quad (15)$$

donde α_1 y α_2 son las aceleraciones angulares. Los torques se pueden relacionar a través de las siguientes ecuaciones

$$F = \tau_1 R_1 \quad (16)$$

$$F = \tau_2 R_2 \quad (17)$$

igualando las Ecs. (17) y (18), se tiene

$$\frac{\tau_1}{R_1} = \frac{\tau_2}{R_2} \quad (18)$$

despejando τ_2 y sustituyendo la relación de radios

$$\tau_2 = \frac{R_2}{R_1} \tau_1 = r \tau_1 \quad (19)$$

se pueden relacionar los torques τ_1 y τ_2 a través de las inercias I_1 y I_2 , y de las aceleraciones angulares α_1 y α_2 de la siguiente manera

$$\tau_1 = I_1 \alpha_1 \quad (20)$$

$$\tau_2 = I_2 \alpha_2. \quad (21)$$

Entonces la fórmula del torque para el sistema llanta-pavimento está dada por

$$\tau_1 = \left[I_1 + \frac{I_2}{r^2} \right] \alpha_1 \quad (22)$$

con base en este par se adquirió el servomotor.

Conocidos los datos necesarios para el sistema, se diseñó el banco de pruebas en un paquete CAD, además de realizar un análisis de esfuerzos y deformaciones al sistema. La estructura experimental está dividida en dos secciones, la parte que se conforma por el servomotor y la llanta, y la parte del rodillo. En la primera sección, la llanta está acoplada directamente al eje del servomotor por medio de una extensión realizada al eje. En uno de los extremos del eje se incorporó un rodamiento de rodillos acilíndricos. El servomotor está sujeto a un soporte de acero; el eje de la llanta es colocado dentro de dos soportes de acero. Asimismo se añadieron dos prisioneros que impiden el movimiento lateral de la llanta (ver Fig. 2 (izquierda)).

La segunda sección está conformada por el rodillo, el eje del rodillo y los brazos. El eje está sostenido por los brazos que tienen movimiento angular libre para asegurar el contacto por gravedad entre la llanta y el rodillo. También se incluyeron rodamientos de rodillos acilíndricos para la sujeción del eje del rodillo y el eje. Se maquinaron dos tapas de aluminio para la sujeción del rodillo y se instalaron prisioneros para impedir el movimiento lateral del rodillo (ver Fig. 2 (derecha)).

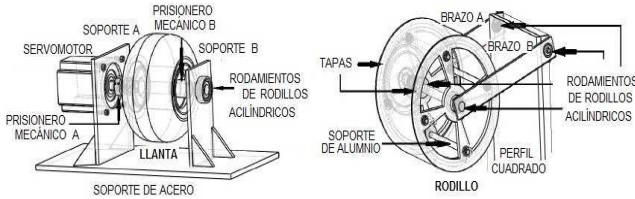


Figura 2. Secciones del sistema experimental.

V. LEY DE CONTROL PARA EL BANCO DE PRUEBAS

El objetivo principal del controlador a diseñar es conseguir estabilidad en el seguimiento de trayectorias. El controlador que se propone está basado en la velocidad angular del rodillo ω_2 y la velocidad relativa s del sistema. Las trayectorias deseadas para estas velocidades implican a su vez aceleraciones y desaceleraciones en los elementos dinámicos del banco de pruebas.

Para diseñar el controlador es necesario conocer el modelo dinámico propuesto de la instalación experimental. La Ec. (1) que describe la dinámica longitudinal del vehículo es remplazada por la dinámica rotacional del rodillo dada por

$$I_2 \dot{\omega}_2 = R_2 F - \tau_{c2} - B_2 \omega_2 \quad (23)$$

donde I_2 es la inercia del rodillo, ω_2 su velocidad angular, F la fuerza de fricción, τ_{c2} el par perdido por fricción seca en los rodamientos del rodillo y B_2 el coeficiente de viscosidad en los rodamientos del rodillo.

La ecuación que representa la dinámica de la llanta está representada como

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \tau_m - \tau_{c1} - R_1 F - B_1 \omega_1 \quad (24)$$

donde I_1 es la inercia de la llanta y motor, ω_1 su velocidad angular de la llanta, τ_{c1} el par perdido por fricción seca en los rodamientos de la llanta y el B_1 coeficiente de viscosidad en los rodamientos de la llanta.

Las Ecs. (23) y (24) representan la dinámica del sistema y se pueden relacionar a través de la velocidad relativa $s = R_2 \omega_2 - R_1 \omega_1$. Al tomar la derivada de la velocidad relativa \dot{s} y sustituyendo $\dot{\omega}_1$ y $\dot{\omega}_2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{s} = & F \left[\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2} \right] + \omega_2 \left[\frac{B_1 R_2}{I_1} - \frac{B_2 R_2}{I_2} \right] - s \left[\frac{B_1}{I_1} \right] \\ & - \tau_m \left[\frac{R_1}{I_2} \right] + \tau_{c1} \left[\frac{R_1}{I_1} \right] - \tau_{c2} \left[\frac{R_2}{I_2} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Por lo tanto el modelo sobre el que se diseña la ley de control está descrito por

$$\dot{\omega}_2 = C_1 \mu - C_2 \omega_2 - C_3 \quad (26)$$

$$\dot{s} = C_4 \mu + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 \tau_m - C_8 \quad (27)$$

donde $C_1 = \frac{R_2}{I_2}$, $C_2 = \frac{B_2}{I_2}$, $C_3 = \frac{\tau_{c2}}{I_2}$, $C_4 = \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}$, $C_5 = \frac{B_1 R_2}{I_1} - \frac{B_2 R_2}{I_2}$, $C_6 = \frac{B_1}{I_1}$, $C_7 = \frac{R_1}{I_1}$, $C_8 = \frac{R_1 \tau_{c1}}{I_1} - \frac{R_2 \tau_{c2}}{I_2}$.

Los errores de seguimiento para la velocidad angular ω_2 y velocidad relativa s están definidos respectivamente como:

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{2d} \quad (28)$$

$$\tilde{s} = s - s_d \quad (29)$$

donde ω_{2d} y s_d son los valores deseados para ω_2 y s .

Así, la dinámica del error de seguimiento queda como

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = C_1 \mu - C_2 \omega_2 - C_3 - \dot{\omega}_{2d} \quad (30)$$

$$\dot{\tilde{s}} = C_4 \mu + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 \tau_m - C_8 - \dot{s}_d. \quad (31)$$

Para la obtención de la ley de control se propone una función candidata de Lyapunov utilizando la dinámica del error de seguimiento como sigue

$$W_1 = \frac{1}{2} \gamma \tilde{s}^2 \quad (32)$$

y al tomar la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov se tiene

$$\dot{W}_1 = \gamma \tilde{s} \dot{\tilde{s}}. \quad (33)$$

Sustituyendo $\dot{\tilde{s}}$ en la Ec. (33) se tiene

$$\dot{W}_1 = \gamma \tilde{s} [C_4 \mu + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 \tau_m - C_8 - \dot{s}_d] \quad (34)$$

La ley de control se obtiene seleccionando τ_m de la Ec. (34) como

$$\tau_m = \frac{1}{C_7} [-C_4\mu - C_5\omega_2 + C_6s + C_8 + \dot{s}_d - f\tilde{s}] \quad (35)$$

que incluye un término de corrección de error $f\tilde{s}$. Al sustituir τ_m en la Ec. (34) se tiene

$$\dot{W}_1 = -\gamma f\tilde{s}^2 \quad (36)$$

Lo que garantiza que $\tilde{s} \rightarrow 0$. Esto a su vez implica que $\mu(s) \rightarrow \mu_d(s_d)$. Por otro lado $\dot{\omega}_2$ se puede expresar como

$$\dot{\omega}_2 = -C_1(\mu - \mu_d) - C_2\omega_2 - C_3 \quad (37)$$

donde $(\omega_2 + \omega_{2d}) > 0$, por diseño. El término $(\mu - \mu_d)$ es acotado y tiende a cero, por lo que no hay tiempo de escape finito. Después de un tiempo lo suficientemente grande, se tiene $\dot{\omega}_2 = -C_2\omega_2$ lo que implica que $\omega_2 \rightarrow 0$ y con ello se prueba la estabilidad asintótica de $\tilde{s} = 0$ y $\dot{\omega}_2 = 0$ con la ley de control propuesta para τ_m .

VI. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS

Los parámetros físicos del sistema son requeridos por la ley de control, por lo tanto los radios, inercias, coeficientes de viscosidad y de fricción seca ($R_1, R_2, I_1, I_2, B_1, B_2, \tau_{c1}$ y τ_{c2}) y las constantes del modelo de Fricción de LuGre ($\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y v_s) deben ser recuperados. A continuación se describe la metodología para recuperarlos.

El radio del rodillo R_2 se midió experimentalmente con un calibrador de alta precisión, en el caso de la llanta esta tiene un radio variable dependiendo del peso del rodillo y de la presión de la llanta. Para conocer este radio se tomaron mediciones de un punto base (piso) hacia la tangente de un balero del rodillo y hacia la tangente de un balero de la llanta (ver Fig. 3). Finalmente $R_2 = 0.2535$ [m] y $R_1 = 0.1081$ [m].

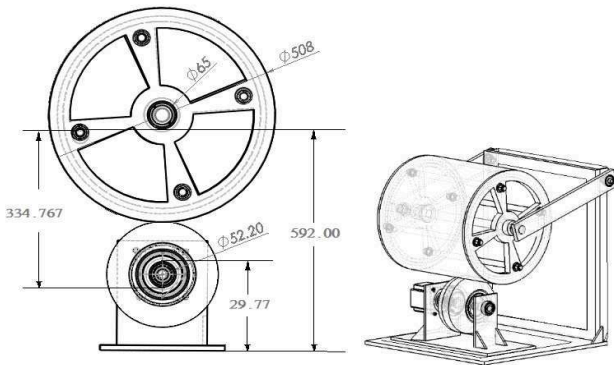


Figura 3. Obtención de parámetros R_1 y R_2 , dimensiones en [mm].

Para la obtención de la inercia I_1 , el coeficiente de viscosidad B_1 y el par perdido por fricción seca en los rodamientos de la llanta τ_{c1} , se realizaron pruebas en la llanta sin contacto con el rodillo, para lo cual se utilizó la Ec. (24), despreciando

el término R_1F . Al analizar la respuesta a escalón de esta ecuación para una entrada τ_m constante, se tiene

$$\omega_1(t) = \frac{\tau_m - \tau_{c1}}{B_1} (1 - e^{-\frac{B_1}{I_1}t}) \quad (38)$$

derivando

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{\tau_m - \tau_{c1}}{I_1} e^{-\frac{B_1}{I_1}t} \quad (39)$$

derivando de nuevo

$$\ddot{\omega}_1(t) = -\frac{B_1}{I_1} \dot{\omega}_1(t). \quad (40)$$

La Ec. (39) tiene un máximo en $t=0$, por lo que al evaluar queda como

$$\tau_m = I_1 \dot{\omega}_{1max} + \tau_{c1} \quad (41)$$

Se pueden realizar experimentos con base en la Ec. (41) para distintos valores de τ_m y resolver el problema como uno de mínimos cuadrados, donde las incógnitas son I_1 y τ_{c1} . Una vez determinados estos, el valor de B_1 se obtiene de la Ec. (40). El comportamiento del sistema en estos experimentos se ilustra en la Fig 4. Los valores obtenidos de los experimentos aplicados a la llanta son $I_1=0.0051$ [N/m], $\tau_{c1}=0.0347$ [N/m] y $B_1=1.4347 \times 10^{-3}$ [N/m].

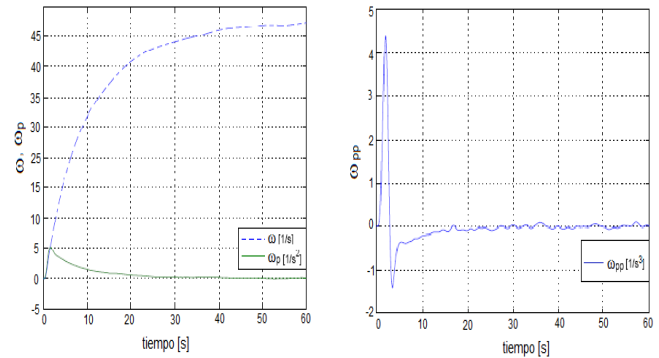


Figura 4. Velocidad, aceleración y jerk $\omega_1, \dot{\omega}_1, \ddot{\omega}_1$ en la llanta para un par constante.

Para la adquisición de los parámetros del rodillo se parte de la Ec. (23). Si se considera una velocidad constante $\omega_2 = \omega_{cte}$, entonces $\dot{\omega}_2 = 0$, quedando la Ec. (23) como

$$R_2F = B_2\omega_{cte} + \tau_{c2}. \quad (42)$$

Cuando las velocidades angulares del rodillo y de la llanta son constantes se puede calcular la fuerza F . Entonces, a partir de la Ec. (42) evaluada para distintos valores de F se obtiene otro sistema de ecuaciones que permite determinar B_2 y τ_{c2} . Los valores correspondientes fueron $B_2 = 0.0179$ [N/m] $\tau_{c2} = 1.2253$ [N/m].

Para la obtención de la inercia I_2 se resuelve la Ec. (23), se asume la fricción nula $F = 0$ y la velocidad del rodillo constante $\omega_2 = \omega_{cte}$, entonces

$$\omega_2(t) = \frac{\tau_{c2} + B_2\omega_{cte}}{B_2} e^{-\frac{B_2}{I_2}t} - \frac{\tau_{c2}}{B_2} \quad (43)$$

derivando

$$\dot{\omega}_2 = \frac{R_2 F_{cte}}{I_2} e^{-\frac{B_2}{I_2} t}. \quad (44)$$

El experimento se realiza al llevar al rodillo a una velocidad constante, levantarlo para evitar contacto con la llanta para y conseguir $F = 0$. Las gráficas correspondientes a este experimento se muestran en la Fig. 5. El valor obtenido fue $I_2=0.7465$ [N/m] para una velocidad angular de 30 [rad/s].

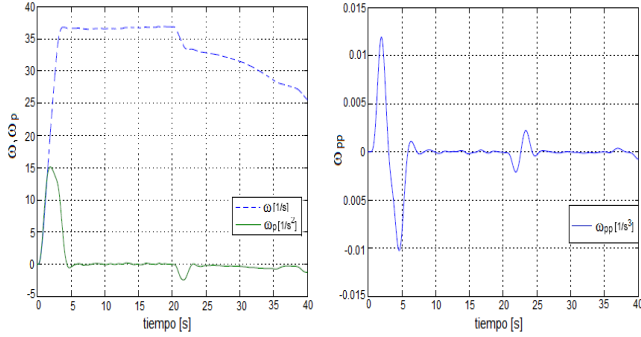


Figura 5. Velocidades angulares ω_2 , $\dot{\omega}_2$, $\ddot{\omega}_2$ en el rodillo para un par constante.

El modelo de LuGre permite capturar la transición observada de la fuerza de fricción durante el frenado y la aceleración. Este modelo introduce la variable z que representa el estado de deformación del contacto y reproduce el efecto *Stribeck*. Los parámetros asociados a este modelo son σ_0 , σ_1 , σ_2 , v_s , μ_c y μ_s . El efecto *Stribeck* relaciona la magnitud de la fuerza de fricción F con la velocidad relativa s en estado estacionario, por lo tanto la fuerza de fricción en estado estacionario es

$$F = g(s) + \sigma_2 s. \quad (45)$$

Sustituyendo $g(s)$ de la Ec. (11) evaluada para fuerzas¹ en la Ec. (45) se tiene

$$F = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left|\frac{s}{v_s}\right|^{\frac{1}{2}}} + \sigma_2 s \quad (46)$$

donde a cada valor de la velocidad relativa s le corresponde una determinada fuerza de fricción F . Se realizaron pruebas en estado estacionario midiendo la fuerza de fricción F y la velocidad relativa s . Para el cálculo de F_c se tomó el menor valor de la velocidad relativa, este corresponde a 0.000628 [rad/s], por tanto la fuerza para iniciar el movimiento del sistema es la fuerza de fricción estática máxima F_s corresponde a 4.8540 [N].

Para encontrar la fricción viscosa σ_2 se sabe que esta fricción representa una fuerza que es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad. La fuerza de fricción en estado estacionario corresponde a

$$F = F_c + \sigma_2 s. \quad (47)$$

¹Dado que se conoce el peso del rodillo.

Dado que se conoce la velocidad relativa s y la fuerza de fricción F , se pueden sustituir estos valores en la ecuación anterior, entonces $\sigma_2 = 47.1772$ [kg/s]. Conociendo los valores de F_c , F_s , s , σ_2 se puede determinar v_s , que corresponde al valor de 0.0094 [m/s].

Para determinar los parámetros σ_0 y σ_1 del modelo de LuGre se utiliza identificación de parámetros por el método de gradiente. La fuerza de fricción se puede expresar de la siguiente forma

$$F = W\sigma \quad (48)$$

donde W es el vector de señales o regresor y σ es el vector de parámetros desconocidos. Por otro lado sustituyendo las Ecs. (9) y (10) en la Ec. (48) y reacomodando términos, se tiene

$$F = \sigma_0 z - \sigma_0 \sigma_1 \frac{|s|}{g(s)} + (\sigma_1 + \sigma_2) s \quad (49)$$

que se puede reescribir como

$$F = W_z \sigma_x \quad (50)$$

donde

$$W_z = \begin{bmatrix} z & -\frac{|s|}{g(s)} z & s \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \sigma_1 \\ \sigma_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

La fuerza de fricción F se puede obtener de la Ec. (24). Para obtener el vector W_z , dado que se desconoce z , se implementó el observador presentado en (Alvarez, L. et al. 2005), este es

$$\dot{\hat{z}} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \hat{z} \quad (53)$$

El estimador empleado es

$$\dot{\hat{\sigma}}_x = P_0 W_z e_1 \quad (54)$$

donde $e_1 = (\hat{F} - F)$, \hat{F} es la fuerza de fricción estimada, $\hat{\sigma}_x$ son los parámetros estimados y P_0 es una ganancia. El identificador con el estimador por el método del gradiente sólo requiere de la velocidad relativa s y de la fuerza de fricción F . La Fig. 6 (izquierda) muestra dos curvas que representan la fuerza de fricción F y la fuerza de fricción estimada F_e . El error correspondiente se muestra en la Fig. 6 (derecha). Los valores de σ_0 y σ_1 obtenidos son 4.5 [1/m] y 10 [s/m] respectivamente.

VII. RESULTADOS EXPERIMENTALES DE LA LEY DE CONTROL CON BASE EN TEORÍA DE LYAPUNOV

Las siguientes gráficas muestran los resultados preliminares de la implementación de la ley de control en el sistema experimental. El controlador utiliza el estimador de parámetros en línea.

En los experimentos se utilizó como señal de referencia una función senoidal en la velocidad con un sesgo tal que no ocurran cambios de dirección y se requieran aceleraciones y

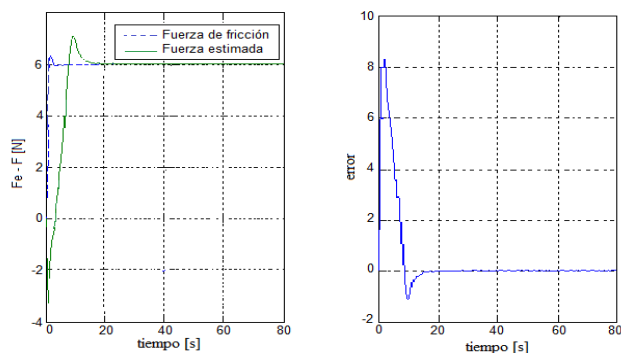


Figura 6. Fuerza de fricción real y fuerza de fricción estimada (izquierda) y Error del estimador (derecha).

desaceleraciones del rodillo. La Fig. 7 muestra el error de seguimiento para la fuerza \hat{F} . En esta imagen se observa convergencia a los 20 [seg]. Es de notar el transitorio en el seguimiento de fuerza, que indica problemas con las sintonización de las ganancias y la falta de una trayectoria de arranque suave. El error de seguimiento para velocidad angular $\hat{\omega}_2$ se muestra en la Fig. 8. Esta gráfica muestra que el error es variante a lo largo de toda la trayectoria, lo que es producto del desbalanceo del banco. En la Fig. 9 se observa la gráfica correspondientes al error de seguimiento para la velocidad relativa \hat{s} , es de notar que aunque este no alcanza el valor cero, toma valores pequeños entre 0 y 0.03 [mrad/s].

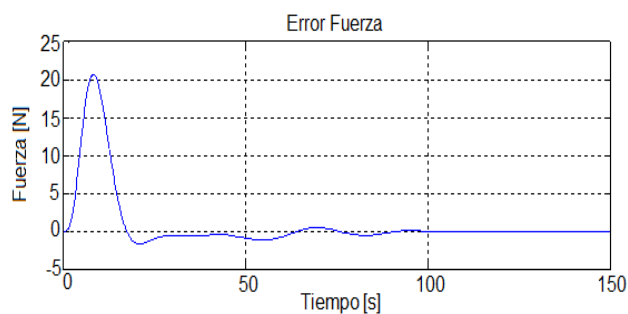


Figura 7. Gráfica de la fuerza de fricción F para una entrada senoidal.

VIII. CONCLUSIONES

Se describió el diseño y caracterización de un banco de pruebas para analizar la fricción llanta-pavimento que consiste en una llanta acoplada a un servomotor sin transmisión, que a su vez impulsa un rodillo que gira sobre la llanta, impulsado por esta únicamente por efectos de fricción, y que representa tanto la inercia del vehículo como el pavimento. El sistema tiene por objeto probar la aplicación del modelo dinámico de fricción de LuGre para diseñar estrategias de tracción o frenado para vehículos. Se describe el modelo matemático del banco de pruebas y se detalla la metodología

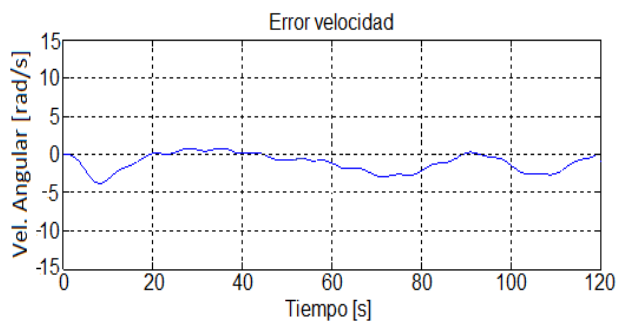


Figura 8. Gráfica de la velocidad angular ω para una entrada senoidal.

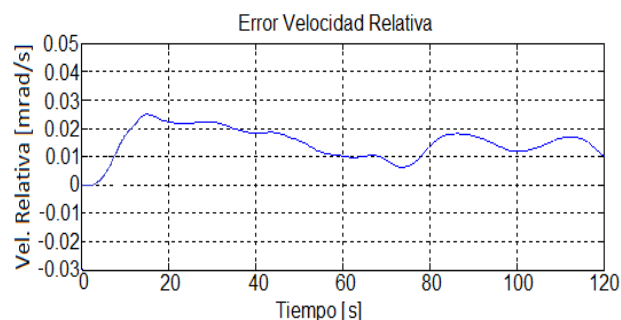


Figura 9. Gráficas de la velocidad relativa s para una entrada senoidal.

para su calibración. Finalmente se muestran resultados preliminares de una ley para control de seguimiento de trayectorias. Los resultados son alentadores, pero falta rediseñar los experimentos de seguimiento con mayor cuidado y eliminar problemas detectados de desbalanceo.

REFERENCIAS

- Aguilar, J. (2008). Diseño de una instalación experimental para estudiar la caracterización llanta-pavimento. Tesis de Maestría. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad Universitaria, México, D.F.
- Alvarez, L., Yi, L. y Olmos, L. (2005). Dynamic friction model-based tire-road friction estimation and emergency braking control. *Transactions of the ASME* **127**(690214), 22–32.
- Armstrong-Hélouvy, B. (1991). *Control of machines with friction*. Kluwer Academic Publishers. USA.
- Bradley, J. y Allen, R. F. (1931). The behaviour of rubber-tyred wheels.. *Automotive Engineer*. **Volume 21**, 57–77.
- Canudas de Wit, C., Astrom, K.S. Olsson, K. y Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(3), 419–425.
- Harned, J., Johnston, L. y Scharpf, G. (1969). Measurement of tire brake force characteristics as related to wheel slip (antilock) control system design. *SAE Transactions* **78**(690214), 909–925.
- Kiencke, U. (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tyres and road. En: *Proceedings of the IFAC World Congress*. Vol. 1. pp. 15–18.
- Kiencke, U. y Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS-systems. En: *In Proceedings of the AVEG'94*.
- Liu, Y. y Sun, J. (1995). Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems. En: *In The American Control Conference, Seattle, Washington*. pp. 1178–82.